ETUDE sur les CRUES

(Rapport préliminaire de Monsieur L. LE CAM)

MLO/JD

1950

ETUDE sur les CRUES

Les rivières ont joué depuis l'origine un rôle important dans l'économie humaine. Cependant nos connaissances sur le cycle de l'eau dans la nature sont encore à un stade peu avancé. Dans les pages qui suivent, un des problèmes les plus importants pour les constructeurs de barrages ou autres ouvrages d'art va être abordé. Il n'est pas question d'en donner ici une solution complète, mais seulement de faire le point des connaissances actuelles. La littérature relative aux crues est d'une abondance telle qu'il ne nous a pas été possible de lire ou même de parcourir tout ce qui a été écrit sur la question. Nous espérons toutefois ne pas avoir laissé échapper les apports les plus importants. On trouvera en annexe une bibliographie assez étendue mais non exhaustive.

Lorsque l'on connait, au moins approximativement, le débit de crue à évacuer, le calcul de l'ouvrage appartient au domaine de l'hydraulicien et ne comporte pas en général de difficulté particulière; aussi n'aborderons-nous que la partie hydrologique de l'étude.

L'exposé des méthodes connues à l'heure actuelle fera l'objet d'une première section, divisée en deux chapitres principaux : méthodes statistiques, et méthodesutilisant les mécanismes physiques de la crue. La dernière section relative à nos propres travaux est encore en gestation et doit être considérée comme susceptible de modification et d'élargissement.

Chapitre I -

NOTIONS GENERALES SUR LE DEBIT D'UNE RIVIERE

Le débit d'une rivière en un point déterminé est une fonction du temps, soit $x(t)$, d'allure complexe, et que l'on a presque dès l'origine considérée comme aléatoire. Il ne faut pas ici donner à ce dernier qualificatif un sens métaphysique, mais seulement entendre que le calcul des probabilités semble être l'outil naturel d'étude d'une telle fonction. Pour le probabiliste, une fonction aléatoire est assez bien caractérisée par la loi de probabilité $P(x_1 \dots x_n)$ de n'importe quel ensemble $x(t_1) \dots x(t_n)$. Il peut être utile d'opérer sur d'autres représentations, et par exemple on fera souvent appel à la représentation dite duale. Dans celle-ci les propriétés de la fonction sont caractérisées par la fonctionnelle

$$\varphi[s(t)] = E\, e^{i\int s(t)\, x(t)\, dt}$$

que l'on nomme fonction caractéristique.

Soit une fonction quelconque $x(t)$; la fonction :

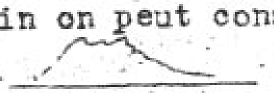
$$\mathcal{F}\{x(t), X\} = \frac{\text{mesure des ensembles où } x(t) \leq X}{\text{mesure de l'intervalle où l'on considère } x(t)}$$

sera dite distributrice de $x(t)$. Notons tout de suite que cette courbe analogue à une répartition de probabilité n'en est pas une. La probabilité pour que, $x(t_1)$ étant égal à x_1, $x(t_2)$ soit inférieur à x_2, notée $P\{x_2 \mid x_1, t_1, t_2\}$ est dite probabilité de passage. Soit X une valeur fixée, un point t tel que $x(t-\varepsilon) < X < x(t+\varepsilon)$ sera dit "upcross", de même pour downcross. Un maximum local sera dit "pointe", et un minimum local "creux".

La définition même des crues varie suivant les auteurs, et naturellement suivant l'utilisation que l'on désire en faire. Les quatre définitions principales donnent respectivement :

- X égal à une pointe,
- X égal à un maximum journalier pris sur des limites fixées d'avance, par exemple de minuit à minuit,
- X égal à un maximum journalier, l'intervalle de 24 heures étant pris de telle sorte que X soit le plus grand possible.

Enfin on peut considérer comme crue un évènement de la forme



les diverses pointes de l'intervalle étant alors considérées comme appartenant à un seul et même phénomène.

Ces diverses définitions mènent à des relevés et des calculs en général distincts.

...

Il ne semble pas possible de se passer, dans l'étude des crues, de la notion de fréquence, ou notions connexes. Les pionniers, pour qui ces concepts n'avaient pas un sens très clair, parlent de : crue fréquente, crue rare, crue exceptionnelle, etc. On peut d'ailleurs donner différentes définitions de la fréquence d'une crue :

1°) Considérons une année de relevés, et supposons que l'on prenne le débit instantané (ou quotidien) maximum de cette année, soit X (ce débit porte le nom de crue annuelle), sur un grand nombre d'années, n, X aura une distribution $F(X)$ que l'on peut considérer comme une loi de probabilité, les crues de deux années successives étant assumées indépendantes. On définira comme crue centenaire, millénaire ... la valeur x telle que

$$F(x) = .99 \quad .999 \quad \text{etc.}$$

2°) Si l'on considère la distributrice $\mathcal{F}\{x(t), X\}$ un point x tel que $\mathcal{F}\{x(t), x\} = \alpha\,\%$ est un débit tel qu'en moyenne il ne soit pas dépassé sur une proportion α du temps.

3°) Enfin, on peut noter les intervalles entre up-crosses successifs ou pointes successives de valeur X, ces intervalles θ auront une distribution $G(\theta)$ et la valeur moyenne $\int \theta \, dG(\theta)$ sera dite temps moyen de recurrence, de l'up cross X, de la pointe X.

Dans l'hypothèse d'une définition de la fréquence basée sur la répartition $F(x)$ de la crue annuelle, on a considéré différentes crues typiques dont voici les équations :

1°) Crue moyenne relative à n années : (Fuller)

$$\bar{x} = \int_0^\infty n \, x \, F^{n-1}(x) \, dF(x)$$

2°) Crue médiane (Fuller)

$$F^n(\bar{x}) = \frac{1}{2} \quad \text{soit si } n \text{ est grand} \quad F(\bar{x}) \approx 1 - \frac{\operatorname{Log} 2}{n}$$

3°) Crue de probabilité $1 - \frac{1}{T}$ (millénaire, etc.) ou encore crue de période recurrence T :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{T} \quad \text{ou} \quad T = \frac{1}{1 - F(x)}$$

4°) Crue modale (la plus fréquente) (Gumbel)

$$n - 1 = - \frac{F(x) \, F''(x)}{\{F'(x)\}^2}$$

....

La crue moyenne de Fuller n'offre pas d'avantages particuliers et son sens intuitif est peu précis. Elle n'a été employée par cet auteur qu'à la suite d'une confusion. Fuller a en effet cru que l'on pouvait l'identifier à la crue médiane, ce qui est tout à fait inexact. Les auteurs français ayant fait usage des formules de Fuller ont commis encore une erreur supplémentaire en l'identifiant à la crue de probabilité $1-\frac{1}{n}$.

La valeur modale utilisée par Gumbel présente entre autres l'inconvénient de dépendre du repérage du débit. Elle n'est pas la même sur le débit, le logarithme du débit, ou la hauteur d'eau.

Dans ce qui suit, on suppose adoptée une définition de la fréquence que l'on précisera lorsque le besoin s'en fera sentir. On verra d'ailleurs qu'en pratique il n'y a pas de raison spéciale de choisir la crue millénaire plutôt que la crue cinq-millénaire. Des considérations économiques seules peuvent préciser la fréquence à adopter.

Chapitre II

LES METHODES STATISTIQUES

La première possibilité qui s'est présentée à l'esprit des hydrauliciens a été le calcul de la crue dite maximum, que l'on ne dépassera jamais. Il est bien évident qu'il ne peut couler dans une rivière plus d'eau que n'en supporte la surface du globe. On peut même aller plus loin, et en tout état de cause les débits peuvent être considérés comme ayant un maximum. Toutefois le maximum que l'on peut calculer est extrêmement élevé. Il semble donc plus sage de se borner à évaluer les crues dont le risque est comparable à ceux que l'on accepte habituellement dans les autres branches de l'activité humaine. Ceci mène donc à construire un déversoir évacuant des crues jusqu'à concurrence de débits de probabilité faible.

La méthode utilisée autrefois pour évaluer de telles crues dérive de la pratique habituelle du constructeur : connaissant la crue maximum observée sur la rivière pendant une période quelconque, on la multiplie par un facteur de sécurité en général de l'ordre de 2. Il n'est pas nécessaire d'insister sur l'arbitraire et le peu de fondement de cette méthode.

Nous passerons donc directement à des méthodes plus élaborées. En premier lieu, on doit citer celle à laquelle est resté attaché le nom de Hazen : elle consiste simplement à prendre les crues annuelles observées sur les n années dont on dispose et à ajuster une courbe ou loi de probabilité sur ces valeurs. On peut pour cela employer divers procédés :

a/ Procédé graphique. -Les crues étant classées par ordre de grandeur, on affecte à chacune d'elles une probabilité $\varpi(i, n)$ et l'on porte sur un graphique convenable en abscisses x_i et en ordonnées ϖ_i. Les échelles des abscisses et ordonnées utilisées varient suivant les auteurs. On s'arrange en général pour que la courbe obtenue soit voisine d'une droite et facilement extrapolable. La formule la plus couramment utilisée pour ϖ s'écrit :

$$\varpi(i, n) = \frac{i - \frac{1}{2}}{n}$$

Cependant certains auteurs ont considéré d'autres possibilités : La loi de probabilité $\xi = F(x_i)$ de la ième crue d'une série de n étant

$$\varphi(\xi, i, n)\, d\xi = C_n^i\, i\, \xi^{i-1} (1-\xi)^{n-i}\, d\xi$$

on peut citer les méthodes utilisant :

1°) la médiane de ξ satisfaisant à

$$i\, C_n^i \int_0^{\varpi_i} \xi^{i-1} (1-\xi)^{n-i}\, d\xi = \frac{1}{2}$$

2°) la valeur moyenne de ξ soit $\varpi_i = \frac{i}{n+1}$

La question étant oiseuse, nous n'entrerons pas dans les détails.

En abscisse on porte soit x, soit plus couramment $\log x$. En ordonnées on porte soit la probabilité ϖ elle-même, soit le probit correspondant, c'est-à-dire la variable y telle que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \varpi$$

soit la période de retour : $T = \frac{1}{1-\varpi}$

Il n'est pas difficile de voir que le résultat de l'extrapolation graphique dépend pour beaucoup de la méthode utilisée pour le report des points. Dans ces conditions, on a cherché à limiter les possibilités par deux courbes plutôt qu'à en utiliser une seule. Etant donné que la probabilité de ξ s'écrit

$$f(\xi)\, d\xi = i\, C_n^i\, \xi^{i-1} (1-\xi)^{n-i}\, d\xi$$

on peut prendre un intervalle $[\alpha, \beta]$ tel que

$$\int_\alpha^\beta f(\xi)\, d\xi = 1 - \varepsilon \quad \text{fixé}$$

Un tel intervalle jouit d'une propriété intéressante : il couvrira la valeur vraie de la probabilité de x dans une proportion $1-\varepsilon$ des cas. On peut d'ailleurs, si on le désire, choisir α et β tels que $\int_0^\alpha = \int_\beta^1 = \frac{\varepsilon}{2}$

Au lieu de porter en ordonnées les probabilités correspondant aux points observés, il est préférable d'utiliser :

$$y = \arcsin \sqrt{\varpi}$$

la bande de garde prend alors une largeur sensiblement constante. Si le nombre de points expérimentaux observés est notable (40) y peut être considéré comme Gaussien d'écart type : $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ en radians, soit en grades : $\frac{100}{\pi\sqrt{n}}$ Pour le point d'ordre i sur une série de n on peut prendre alors comme valeur centrale y_0 tel que

$$tg^2 y_0 = \frac{2i-1}{2(n-i+1)-1}$$

On trouvera ci-joint, pour quelques valeurs de n, les limites correspondant à $\frac{\varepsilon}{2} = 1\,\%$ 5 % et 10 %.

Il est difficile de faire un calcul de l'erreur à craindre par cette méthode. En effet les courbes de garde dont il a été question donnent un intervalle de confiance sur la probabilité et non sur la valeur du débit millénaire par exemple. On peut cependant estimer cette erreur en supposant par exemple que la "loi vraie" est une loi de Galton, et que l'on extrapole par une courbe de degré déterminé, droite ou parabole par exemple tenant compte des k valeurs supérieures du débit observé. Le calcul est évidemment très compliqué; on peut aussi bâtir des séries expérimentales à l'aide de tables de nombres pris au ....

hasard de Tippet ou Kendall, et considérer sur ces séries la valeur des erreurs commises. Le module de précision, c'est-à-dire la quantité $\sigma = \sqrt{\frac{E(x-x_o)^2}{x_o^2}}$ où x_o est la valeur vraie et x la valeur estimée, est alors assez grand. Pour les séries qui nous ont servi, on trouve σ voisin de $\frac{2}{\sqrt{n}}$ à $\frac{10}{\sqrt{n}}$
Pour $n = 25$ par exemple, le module de précision est donc supérieur à 100 % !!!

On comprend que l'on ait cherché à utiliser d'autres méthodes, et en particulier à préciser la forme de la courbe de probabilité. Nous allons maintenant envisager ces méthodes.

METHODES STATISTIQUES UTILISANT UNE FORMULE ANALYTIQUE.

Au lieu d'extrapoler graphiquement, à vue, une courbe expérimentale, il est possible de réduire l'arbitraire en prolongeant un ajustement analytique de cette courbe. C'est un principe utilisé dans la quasi totalité des études statistiques. On peut noter que si l'on n'a aucune justification de la formule analytique employée, ce procédé n'est pas meilleur que l'autre, quoique souvent un résultat soit réputé d'autant plus précis que les mathématiques utilisées pour l'obtenir sont plus compliquées.(1) Toutefois, même sans autre hypothèse, la méthode assure une certaine homogénéité entre les résultats de différents hydrologues et a par suite un intérêt

Nous allons citer un certain nombre de lois effectivement employées. D'autres sont aussi valables et notre liste ne vise pas à l'exhaustivité. Il suffira de regarder les lois citées pour voir combien elles diffèrent! Sauf mention expresse du contraire, on suppose que l'ajustement est effectué soit sur des maxima annuels, soit sur des crues assez distinctes pour être considérées comme indépendantes.

lytiquement

1°) Loi de Gauss $dF(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$

cette forme à laquelle s'attache une espèce de valeur métaphysique assez ridicule est à rejeter car symmetrique. Il est connu depuis longtemps que les crues ont une allure dissymétrique.

2°) Loi de Laplace $dF(x) = \lambda e^{-\lambda(x-x_o)} dx$

A rejeter aussi, car elle ne respecte pas la forme en cloche que l'on retrouve toujours. Cette loi peut cependant s'appliquer si l'on ne considère que les crues supérieures à une certaine valeur x_o assez élevée.

...

(1) ~~En pratique, il y a généralement un embryon de justification.~~

(1) Si l'on [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

3°) Loi de Galton (Substitution logarithmique dans la loi de Gauss)

Par suite de son origine Gaussienne, cette loi a gardé un préjugé favorable métaphysique. Pour se rendre compte du peu de fondement ce dernier, il suffit de remarquer que, pour des substitutions convenables dans une loi de Gauss, on peut obtenir presque n'importe quelle loi. Pour la justifier, certains, et en particulier Gibrat, ont fait appel à la notion d'effet proportionnel. Ceci revient à dire que si les crues étaient le produit d'un certain nombre de facteurs indépendants, leur loi serait sensiblement Galtonnienne. Les premisses du syllogisme sont encore à démontrer.
Il y a de fortes chances pour qu'on puisse prouver que c'est faux.

4°) Loi P_3 (III de Pearson, dite de Foster par les hydrologues américains)

$$K\, e^{-\alpha x}(x+a)^{r-1}\,dx$$

5°) Lois I et VI de Pearson :

$$K\, x^{p}(a-x)^{q}\,dx \quad \text{et} \quad K\,(x-b)^{p}\,x^{-q}\,dx$$

6°) Lois de Slade.

Elles dérivent de la loi de Galton par des substitutions homographiques diverses. Slade les a classées en deux types "partiellement bornée" qui est la loi de Galton ordinaire, et "totalement bornée" qui en résulte par la substitution :

$z = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où c n'est pas nul.

7°) Loi de Gumbel, dite de la plus grande valeur

$$e^{-e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}$$

Cette loi dérive de considérations théoriques que nous examinerons un peu plus loin.

8°) Lois de Goodrich.

Elles dérivent de la loi de Laplace par des transformations simples :

$$F(x) = 1 - e^{-h[f(x)]^{c}}$$

Goodrich a considéré plus particulièrement les $f(x)$ de la forme $f(x) = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$. Pour que la loi ne soit pas bornée, si c est positif $f(x)$ doit être de la forme $f(x) = ax+b$ la loi correspondante est alors: $F(x) = 1 - e^{-\alpha(x+a)^{c}}$

Un tel type peut se recommander pour diverses raisons, la principale étant sa parfaite commodité dans les calculs. Il représente d'autre part une variété particulière de type P_3 substitué. ~~sa forme globale est assez convenable.~~

...

La différence entre ces lois est plus apparente si l'on considère leur allure asymptotique. Posons $\frac{1}{1-F} = T$ le débit de période de recurrence T peut s'écrire pour T très grand

1°) Loi de Gauss $\quad x \approx \sqrt{\operatorname{Log} T}$

2°) Loi de Laplace $\quad x \approx \operatorname{Log} T$

3°) Loi de Galton $\quad x \approx \operatorname{Exp} \sqrt{\operatorname{Log} T}$

4°) Loi P_3 $\quad x \approx \operatorname{Log} T$

5°) Loi P_1 $\quad x \approx a$

5^b°) Loi P_6 $\quad x \approx T^{\alpha} \quad \alpha = q - p - 1 > 0$

6°) Loi de Slade $\quad x \approx \dfrac{a\, e^{\sqrt{\operatorname{Log} T}} + b}{c\, e^{\sqrt{\operatorname{Log} T}} + d}$

c'est-à-dire pour la loi partiellement bornée

$$x \approx e^{\sqrt{\operatorname{Log} T}}$$

pour la loi totalement bornée

$$x \approx \frac{a}{c}$$

7°) Loi de Gumbel

$$x \approx \operatorname{Log} T$$

8°) Loi de Goodrich

$$x \approx \left\{ \frac{\alpha \operatorname{Log} T + \beta}{\gamma \operatorname{Log} T + \delta} \right\}^{1/c}$$

soit respectivement

et $\quad x \approx \{\operatorname{Log} T\}^{1/c}$

et $\quad x \approx \left\{\frac{\alpha}{\gamma}\right\}^{1/c}$. Les comportements semi-asymptotiques de ces diverses formules étant malgré tout peu différents, elles ne sont pas facilement discernables en pratique et l'on peut juger de la variété des résultats auxquels on risque d'être conduit. Nous citerons encore les types de M. Halphen quoique leur application aux crues n'ait pas donné lieu à beaucoup d'exemples:

9°) A/- $\quad K\, e^{-ax - \frac{b}{x}}\, x^{r-1}\, dx$

B/- $\quad K.\, e^{-a\frac{x^2}{1} - bx}\, x^{r-1}\, dx$

...

La méthode a une limite de précision intrinsèque dont on peut avoir une idée par le calcul suivant :

Si la loi des crues était rigoureusement une loi de Galton, la crue de probabilité p s'écrirait

$$x = e^{\mu + k\sigma}$$

μ et σ étant respectivement la moyenne et l'écart type du logarithme du débit. Lorsque l'on estime leurs valeurs d'après n relevés de crues <u>indépendantes</u>, les nombres m et s correspondants ont des variances égales à $\frac{\sigma^2}{n}$ et $\frac{\sigma^2}{2n}$ d'où pour x une précision relative égale à :

$$\rho = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{k^2}{2}}$$

Pour la crue de probabilité $p = 10^{-3}$ $k = 3,09$ ce qui donne $\rho = \frac{2,4\,\sigma}{\sqrt{n}}$, pour beaucoup de rivières françaises σ est voisin de 0,4 d'où $\rho = \frac{.96}{\sqrt{n}}$. Ceci signifie que pour avoir un module de précision de l'ordre de 10 %, il est nécessaire d'opérer sur 100 points indépendants satisfaisant à la même loi de probabilité, soit en fait sur 100 années.

Pour les relevés habituels, n est voisin de 30, ce qui donne un module de précision voisin de 18 %. Si l'on considère qu'il est fréquent de dépasser 1,5 module de chaque côté, ceci donne une <u>crue connue à environ 50 % près.</u>

Ceci suppose encore que la loi de Galton soit la "vraie" loi. La marge d'erreur possible est donc encore plus notable. On le comprendra aisément si l'on considère que pour une loi β et une loi de Galton de même cv (0,4 par exemple), les points $F = 1 - \frac{1}{1000}$ sont respectivement 2,70 et 3,03 fois la moyenne soit un écart d'environ 10 % pour des lois au fond peu différentes et en tout cas non discernables sur un seul échantillon.

La loi de Galton est souvent utilisée sous la forme

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \qquad z = a \operatorname{Log}(x - x_0) + b$$

Il est nécessaire de noter ici que le paramètre x_0 introduit une liberté supplémentaire et accroit le risque d'erreur dû au hasard. C'est pour cette raison que Slade a recommandé fortement de ne fixer les bornes de ses lois que par des considérations physiques, à l'exclusion de tout calcul faisant intervenir même implicitement les chiffres des débits eux-mêmes.

Les erreurs d'échantillonnage dans d'autres lois, loi de Gumbel par exemple, pourraient se limiter de la même façon. D'après B.F. Kimball si les paramètres de la loi $e^{-e^{(a-bx)}}$ sont estimés par le "maximum likelihood", l'écart type de la crue correspondant à $F(x) = e^{-e^{-k}}$ est :

$$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{n\alpha}} \sqrt{1 + (1-C+k)^2 \frac{6}{\pi^2}}$$ où $C = .5772$ constante d'Euler

Pour $F = 1 - \frac{1}{1000}$ $k = 6{,}907$ si l'on prend toujours un cv voisin de 0,40 $\alpha = 3{,}21$, et l'on obtient comme module de précision relative : $\rho = \frac{1{,}08}{\sqrt{n}}$ à rapprocher de $\frac{0{,}96}{\sqrt{n}}$ trouvé pour la loi de Galton.

Ces calculs d'erreur donnent une idée de la variabilité intrinsèque du procédé mais non des limites dans lesquelles on peut raisonnablement prendre la valeur estimée lorsque l'on a fait des calculs sur un échantillon. Ce deuxième problème est celui, ~~qui~~ classique, de l'inférence statistique. ~~Dans quelques cas particuliers~~, On peut en donner une solution d'après Neyman. La méthode de cet auteur consiste à calculer, d'après les données expérimentales, un intervalle tel que si l'on emploie le procédé un grand nombre de fois l'on ne commette en moyenne qu'une proportion fixée à 1 % par exemple d'erreurs. Si la loi est une loi de Galton simple : $F(x) = \int^{z} e^{-\xi^2} d\xi$ $\quad z = \frac{1}{\sigma} \log \frac{x}{q}$

un tel intervalle prend la forme (sur les logarithmes) $[m + \lambda_1 s,\ m + \lambda_2 s]$

où λ_1 et λ_2 sont calculés par la formule :

$$G(\lambda_1) - G(\lambda_2) = .99 \quad \text{avec}$$

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{k-\lambda\eta} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, 2^{\frac{n-3}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{n\xi^2}{2} - \frac{n\eta^2}{2}} \eta^{n-2}\, d\xi$$

LA THEORIE DE GUMBEL.

La crue annuelle d'une rivière se présente comme la plus grande valeur d'une série de n observations. Si ces mesures étaient indépendantes, la loi de la plus grande serait simplement $F^n(x)$ ce que l'on peut encore écrire en posant

$F = e^{-e^{-t}}$ $\quad x = g(t)$ pour un seul point et $x = g(t + \lambda)$

$\lambda = \log n$ pour le maximum de n observations. La variable réduite $y = ax + b$ telle que pour $t = \alpha$ correspondant à $F = 1\%$ $y = 0$ et pour $F = 99\%$ $(t = \beta)$ $y = 1$ peut donc s'écrire :

$$y = \frac{g(t+\lambda) - g(\alpha+\lambda)}{g(\beta+\lambda) - g(\alpha+\lambda)} = \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha} \frac{g'(u)}{g'(v)}$$

Si la fonction g ne croît pas trop rapidement, lorsque $\lambda \to \infty$ $\frac{g'(u)}{g'(v)}$ a une limite égale à 1, y suit donc à la limite la loi

$y = \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$ soit encore : $F(y) = e^{-e^{-(\beta-\alpha)y+\alpha}}$

Cette loi a une forme particulière bien définie et il était normal de l'essayer sur les crues. Remarquons cependant que la limite est atteinte très lentement d'une part, et d'autre part que les débits quotidiens successifs n'étant pas indépendants, l'analyse précédente ne peut s'appliquer. Il reste donc seulement du théorème de Gumbel une forme de loi que l'on peut appliquer si toutefois elle concorde suffisamment bien avec l'expérience. Mais son origine mathématique ne justifie nullement son emploi pour les crues annuelles. Au contraire, si nous cherchons à évaluer la crue de probabilité $F^{*}(x) = 1 - 10^{-3}$ pour n suffisamment grand, nous pouvons utiliser l'approximation en question. Ce n'est plus alors qu'un problème de mathématiques pures. Soit $x = f(t)$ la loi des crues annuelles. La loi de la crue maximum d'une période de n années sera :

$$x = f(t + \lambda), \quad \lambda = \log n$$

et si les dérivées secondes de f deviennent négligeables, on peut écrire :

$$x_{n,t} \simeq f(\lambda) + t f'(\lambda) \qquad \text{soit ici pour } F^{*} = 1 - 10^{-3}$$

$$x_{n,t} \simeq f(\lambda) + 6{,}91 f'(\lambda)$$

ou pour la crue médiane $\quad \tilde{x} \simeq f(\lambda) + .368 f'(\lambda)$

L'intérêt de telles formules est assez limité, le calcul direct ne présentant pas de difficultés. Elles montrent cependant la façon dont varie une crue de probabilité déterminée lorsque n augmente.

AUTRE APPROXIMATION DE LA LOI DES CRUES. (Ne pas utiliser)

Nous avons ci-dessus exposé le point de vue de Gumbel et déclaré que la solution n'était pas valable surtout parce que les débits étaient dépendants. Nous avons essayé d'obtenir une approximation qui tienne compte de la corrélation, en supposant que les débits vérifient l'équation d'Epstein. (x)

Soit alors $F(x, y, t, \tau)$ la probabilité $P_r\{x(t) < x, x(\tau) < y\}$

Il résulte d'un calcul simple que la loi du maximum sur une période $[0, T]$ s'écrit :

$$F[x(0)] \; e^{\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \log F(x, x, t, \tau)\right]_{\tau = t} dt}$$

Soit encore si le débit était stationnaire :

$$F(x) \; e^{\frac{T}{F(x)} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} F(x, x, 0, \tau)\right]_{\tau = 0}}$$

(x) Il n'est pas du tout certain que les débits vérifient cette équation, mais quoique l'on ne sache même pas si de tels processus non dégénérés existent, l'approximation finale ~~semble~~ pourrait être raisonnable.

En particulier, si les débits étaient Galtoniens, la loi du logarithme de la crue serait

$$\Gamma(u)\ e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}}$$

$$u = \frac{1}{\sigma} \log \frac{x}{x_0}$$

$e^{-\lambda}$ = corrélation entre les débits aux temps o et T

$$\Gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Plus généralement, si l'on suppose les débits non stationnaires, on peut écrire :

$$X(t) = \frac{a - m(t)}{\sigma(t)}$$

$$\lambda(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{1 - r(t, t+h)\}$$

et sous des conditions d'intégrabilité :

$$P_r \{\max x(t) < a\} = \{\Gamma[X(0)]\ \Gamma[X(T)]\}^{1/2}\ e^{-\int_0^T \frac{\lambda(t)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma'(X)}{\Gamma(X)} dt}$$

On trouvera en appendice la loi :

$$\Gamma(u) = e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}}$$

comparée à la loi de Gumbel et à la loi de Galton.

EMPLOI D'AUTRES DONNEES.

Jusqu'alors nous nous sommes bornés à utiliser des crues indépendantes et de même loi de probabilité, les crues annuelles. On peut se demander ce que devient la précision lorsque l'on fait intervenir soit tous les débits, soit des débits sélectionnés suivant des méthodes particulières. La méthode associée en France au nom de Gibrat consiste à travailler sur la courbe des débits journaliers classés, considérée comme approximation de la distribution du débit. Alors que les méthodes précédentes définissaient la crue millénaire par $F(x) = 1 - 10^{-3}$, Gibrat la définit par :

$$\mathcal{F}\{x(t), X\} = 1 - \frac{1}{365.000}$$

Ces deux valeurs ne seraient numériquement équivalentes que si les débits étaient indépendants et de même loi; pratiquement la crue de Gibrat est un peu plus grande que la crue annuelle millénaire.

....

Un des défauts de la méthode Gibrat est de faire intervenir de la même façon les mois où les crues se produisent habituellement et ceux où on est quasi certain de ne pas les rencontrer. Un autre défaut d'aspect plus psychologique résulte du grand nombre de points que l'on porte sur la courbe. Ce grand nombre fait illusion sur la précision obtenue. Il est difficile d'estimer celle-ci; cependant on peut faire un calcul approché.

Si l'on suppose que la courbe globale $\mathcal{F}\{x(\theta), x\}$ est représentable par la formule de Galton, la crue millénaire s'écrira encore e^{m+ks} avec $k = 4,54$

Or, dans une chaine Laplacienne de Markoff stationnaire, on sait que si r est le coefficient de correlation entre deux débits quotidiens successifs $\quad \mathrm{var}\, m = \dfrac{1}{365\, n} \dfrac{1+r}{1-r}$

étant le nombre d'années , et

$$\mathrm{var}\, s^2 = \frac{2}{365\, n} \frac{1+r^2}{1-r^2}$$

Supposons par exemple $r = 0,90$, une année correspond alors à $365 \dfrac{1-r}{1+r} \neq 19$ points indépendants sur la moyenne et

$365 \dfrac{1-r^2}{1+r^2} \neq 38,5$ points indépendants sur la variance

(Ces chiffres sont assez raisonnables, plutôt forts).

Ceci correspond à un module de variabilité :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{19} + \frac{k^2}{2 \times 38,5}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times 0,56$$

Le σ intervenant ici est l'écart type des logarithmes de tous les débits et se trouve être souvent voisin de 1. Dans ces conditions l'on obtient donc $\varpi_1 = \frac{0,56}{\sqrt{n}}$

alors qu'en prenant seulement les crues annuelles, on aurait trouvé $\varpi_1 = \frac{0,96}{\sqrt{n}}$. On pourrait donc dire que l'on a en gros une précision 1,7 fois plus grande. Une année entière de débits serait ici équivalente à 3 points indépendants.

Remarquons toutefois que le calcul précité fait appel à une stationnarité des débits qui est loin d'être réalisée en pratique. Il semble difficile d'admettre que l'année soit équivalente à plus de deux points indépendants. Par ailleurs, il est assez clair que si les mécanismes de crues de deux mois de l'année sont nettement différentes, un échantillon de n années ne fournit que n exemples d'un mécanisme donné et ne peut par suite être considéré comme fournissant plus de n observations. Cependant si nous coupons l'année en deux tranches où les crues maxima sont <u>indépendantes et suivent la même loi</u>, le module de

L'amortivie nous a conduit à estimer la précision à $\frac{0,75}{\sqrt{n}}$ ce qui ne représente qu'un gain de précision correspondant à moins de deux points par an.

précision est encore divisé par $\sqrt{2}$. Le problème est plus compliqué lorsque les lois ne sont pas les mêmes. Si nous supposons que ce sont des lois de Galton, en appelant x le logarithme de la crue et Φ l'intégrale de Gauss, l'équation donnant x s'écrit : $\Phi\left\{\frac{x-m}{s}\right\} \Phi\left\{\frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = 1 - \frac{1}{1000}$

En dérivant cette équation, on peut calculer approximativement la précision obtenue sur x ; elle dépend de la différence $m - \mu = \delta$ des moyennes et du rapport des écarts types $\rho = \frac{s}{\sigma}$. La diminution de précision est extrêmement rapide lorsque δ croit. En fait, sur Argentat ou Lamativie, le calcul montre qu'il n'y a pratiquement pas gain de précision.

Nous en resterons là en ce qui concerne les méthodes statistiques élaborées.

Toutefois nous devons citer la méthode qui consiste à relever les crues supérieures à une valeur déterminée assez élevée pour que l'on ait seulement 2 ou 3 points par an. On ne relève que des crues assez éloignées dans le temps pour être considérées comme indépendantes. La discussion de la précision de cette méthode est délicate; signalons seulement qu'elle ne peut donner plus d'informations que la série complète. Il est assez remarquable d'ailleurs que, pour que les crues puissent être considérées comme indépendantes, il est nécessaire que l'intervalle entre elles soit très grand, de l'ordre de trois mois. Ceci est une confirmation de la valeur d'une année en nombre de débits indépendants que nous avons citée plus haut. Si l'intervalle était trois mois, on obtiendrait un peu moins de quatre points par an à condition que les lois soient les mêmes pour les différentes époques.

Il ne nous a pas été possible de faire un calcul précis sur un exemple, les écarts-types auxquels nous sommes arrivés ci-dessus ne donnent une idée de la variabilité que lorsque les paramètres vrais sont à peu près connus. Pour éviter cette difficulté, peu notable si l'on se borne à une loi, mais essentielle si l'on considère quatre crues par an, il eût été nécessaire de calculer un intervalle de confiance et non pas un écart type.

Le calcul numérique d'un tel intervalle est possible, mais déjà compliqué dans le cas d'une seule loi. Lorsque l'on considère plusieurs crues, ~~il n'est même pas certain qu'un tel intervalle existe (il est même probable qu'il n'existe pas), et en tout cas~~ il est pratiquement incalculable.

PROCEDES DERIVES DES METHODES STATISTIQUES.

Au lieu d'opérer de façon complète comme nous l'avons fait plus haut, on peut se contenter d'admettre un type de loi, par exemple la loi de Galton, et d'estimer les caractéristiques de cette loi par des procédés plus ou moins raffinés.

....

Pour ~~Dans~~ la loi de Galton, la crue dite millénaire s'écrit :

$$x = e^{\mu + k\sigma}$$

La crue se produisant une fois sur deux en moyenne (crue médiane) $\bar{x} = e^{\mu}$; la crue millénaire s'écrira donc : $x = \bar{x}\, e^{k\sigma}$

C'est à dire que la crue millénaire est égale à la crue médiane multipliée par un facteur ne dépendant que de σ. Pour des rivières de même σ, ce facteur peut être calculé une fois pour toutes. Nous avions pris plus haut $\sigma = 0{,}40$, le facteur $\lambda = e^{k\sigma}$ serait alors : $\lambda = 3{,}43$.

Ce procédé a été effectivement utilisé, mais sa valeur est conditionnée par l'approximation avec laquelle $\bar{x}$ et σ sont connus. Or, c'est un résultat classique que le calcul de μ et σ fait de la façon habituelle est en un certain sens le meilleur possible.

Un autre procédé de même nature consiste à relever la crue la plus forte de la série de n années connues. On affecte à cette crue une probabilité $\varpi(n)$ correspondant à un probit $y(n)$ tel que $\varpi(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. On peut alors écrire :

$$x = e^{\mu + k\sigma} \qquad x_n = e^{\mu + y\sigma}$$

$$\text{soit} \qquad x = x_n\, e^{(k-y)\sigma}$$

Ceci justifie un procédé très fréquemment employé, mais montre que le coefficient de sécurité dépend de σ et du nombre d'années observées. Il serait possible d'estimer l'erreur à craindre lorsque l'on utilise ce procédé, mais elle dépend beaucoup de la valeur $\varpi(n)$ admise. Plusieurs formules ont été employées

$$\varpi(n) = 1 - \frac{1}{2n} \qquad \varpi(n) = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \varpi(n) = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \qquad \text{etc.}$$

D'autres considèrent que la crue qui s'est produite est celle qui avait les plus grandes chances de se produire, c'est-à-dire la crue modale telle que $n - 1 = \frac{F F''}{F'^2}$. Si l'on admet les approximations $\frac{F'}{1-F} \simeq -\frac{F''}{F'}$ ceci revient à $\varpi(n) = 1 - \frac{1}{n}$

Pour donner une idée de la variation du coefficient avec n nous supposerons n grand et $\varpi(n) = 1 - \frac{\alpha}{n} = 1 - \frac{1}{T}$

Au lieu de prendre la loi de Galton qui se prête mal au calcul, nous utiliserons une loi de Goodrich $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^{k}}$

La relation entre x et x_n devient alors :

$$x = x_n\, (6{,}91)^{c}\, (\log T)^{-c}$$

..

En particulier pour la loi de Laplace $(1-e^{-x})$

$$x = x_n \frac{6,91}{\log T}$$

Si T est grand, il n'est pas nécessaire que la loi coïncide avec la loi exacte dans son ensemble; il est suffisant qu'à partir d'une valeur assez grande de x les lois soient pratiquement identiques. On peut donc admettre que le coefficient de sécurité varie comme $(\log T)^c$ où c est probablement voisin de 1.

La précision intrinsèque d'une telle méthode est faible; si l'on utilise la forme $x = x_n\, e^{(k \, y(n)) \sigma}$ elle dépend naturellement de la façon dont σ a été estimé. La précision pourrait même, pour certaines formes asymptotiques de la loi de probabilité, décroître si n augmente !

Pour la loi de Galton et pour $n = 30$, on peut estimer l'écart type de x à : 3,8 $\frac{\sigma}{\sqrt{10}}$ que l'on peut comparer au 2,4 $\frac{\sigma}{\sqrt{10}}$ d'un calcul correct.

Mais les choses se gâtent rapidement lorsque n augmente.

LA FORMULE DE FULLER.

Si nous réservons ici à cette formule un paragraphe spécial, cela est dû aux nombreuses erreurs auxquelles elle a donné naissance, et aussi au fait qu'elle présente pour le statisticien un caractère assez logique. La formule de Fuller est essentiellement de la forme $X = a + b \log T$. Les coefficients a et b donnés par Fuller lui-même, font intervenir l'aire du bassin, ce dont nous ferons abstraction pour l'instant; dans un autre chapitre, nous reviendrons sur ce problème.

D'après la définition et le mode de calcul de Fuller $X = a + b \log T$ représente la valeur moyenne des crues maxima d'un grand nombre de périodes de longueur T. Toutefois Fuller n'ayant pas songé que ces distributions sont très dissymétriques a identifié X à la valeur médiane des crues maxima des périodes T. Si l'on traduit ceci en symboles :

$$X = \int_0^{\infty} T x \, F(x)^{T-1} F'(x) \, dx \qquad \text{par définition}$$

et Fuller a cru pouvoir l'identifier à :

$$\bar{x} = \text{valeur telle que} \quad F^T(\bar{x}) = \frac{1}{2}$$

C'est là la première erreur à laquelle nous faisions allusion. Les utilisateurs de la formule ne se sont pas contentés de cette méprise, et ont très souvent identifié X à la crue millénaire : x tel que $F(x) = 1 - 10^{-3}$ ou sur une période T x tel que $F(x) = 1 - \frac{1}{T}$

La crue moyenne de Fuller étant difficile à interpréter, nous laisserons systématiquement de côté la définition et le calcul de Fuller, mais utiliserons au contraire la valeur qu'il se proposait de calculer : $\bar{\bar{x}}$. Soit à calculer la crue de probabilité p sur n années, elle s'écrit :

$$F(x) = p^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log p} = e^{-\frac{q}{n}} \simeq 1 - \frac{q}{n} \dots$$

Si l'on suppose que $F(x)$ a un comportement exponentiel à l'∞ c'est-à-dire qu'on peut en avoir une bonne approximation par une loi $F(x) \simeq 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{\frac{1}{c}}}$
loi de Goodrich on obtient pour n grand

$$\frac{x-a}{b} \simeq (-\log q + \log n)^{c}$$

soit pour un comportement exponentiel simple :

$$x \simeq A + B \log n$$

De la même façon, si l'on veut calculer la crue de probabilité $\frac{1}{n}$ on obtient aussi une formule du type de Fuller.

La validité ~~L'utilisation~~ de la formule de Fuller est donc conditionnée par le comportement asymptotique de $F(x)$

Quoique la loi de Galton ait été utilisée très souvent, on peut penser que le comportement asymptotique de la loi de Laplace est meilleur. Celui de la loi de Gauss est probablement d'ordre trop élevé.

Le comportement asymptotique influe sur la variabilité des crues maxima parmi n. Pour la loi de Gauss, l'écart type du maximum de n variables tend vers zéro à peu près comme $\frac{1}{\sqrt{\log n}}$

Pour un comportement exponentiel simple, l'écart type reste sensiblement constant, tandis que pour la loi de Galton il croît indéfiniment. Affirmer que l'on a un comportement simplement exponentiel entraine donc l'affirmation que les crues maxima de n années ont la même dispersion que les crues annuelles. Ceci n'est pas impossible, quoique l'on ne puisse guère en juger actuellement.

Dans les pages qui précèdent, nous n'avons pas toujours fait la distinction entre les diverses possibilités de définition des crues. Le fait qu'une crue soit définie comme un maximum journalier, ou une pointe instantanée, n'intervient pas beaucoup dans nos discussions. Cependant, en face d'un calcul pratique, si l'on ne dispose que de débits quotidiens, il sera nécessaire de faire une correction pour passer aux débits instantanés. Cette correction peut être d'importance considérable, en particulier pour de petits bassins, mais il est nécessaire pour la calculer d'avoir d'autres renseignements, et nous aborderons cette étude ....

seulement dans un chapitre suivant. Notons encore que si l'on a observé un seul débit instantané par jour, à heure fixe, le maximum annuel observé ne peut être considéré et traité comme la crue maximum. Au contraire, une méthode du type de Gibrat s'applique encore.

Nous avons cité un grand nombre de formules de lois de probabilité; il ne nous a pas été possible de choisir entre elles. Un tel choix ne peut en effet être effectué sur un seul relevé de débits; il nécessite une étude d'ensemble des débits d'une région assez homogène. Les calculs nécessaires sont énormes et n'ont pas été effectués faute de temps.

Chapitre III -

METHODES DE CALCUL UTILISANT LES PROPRIETES HYDRAULIQUES DU BASSIN

Il est apparu depuis longtemps que la puissance d'une crue devait être liée aux caractéristiques physiques et topographiques du bassin. Les formules qui ont été proposées afin de tenir compte de ces renseignements sont souvent purement empiriques et ne peuvent prétendre à des résultats sensationnels. Le raisonnement le plus simple que l'on puisse faire est le suivant : la quantité d'eau tombée sur le bassin est en gros proportionnelle à l'aire A du bassin, le temps de parcours de l'eau à sa longueur L soit à $\sqrt{A}$ il en résulte que le débit de crue est vraisemblablement proportionnel à $\sqrt{A}$. C'est là l'origine de la célèbre formule de Myer : $Q = \frac{p\sqrt{A}}{0,564}$. Le nombre p est souvent nommé "cote Myer" et pour les Etats-Unis il a été dressé des cartes de ce nombre p correspondant aux plus fortes crues observées. p varie de 2 à 140 environ si l'on passe des déserts aux régions arrosées de l'est. Il faut noter aussi que ces valeurs n'ont pas grande signification, le nombre d'observations des régions désertiques étant beaucoup plus faible que celui des régions peuplées. Dans le même ordre d'idées, Creager a porté sur un même graphique toutes les crues extraordinaires enregistrées dans les différents pays du monde. A part quelques points aberrants, toutes ces crues se trouvent au-dessous d'une courbe d'équation :

$$Q = 46\,C\,A^{.894\,A^{-.048}} \qquad\qquad Q = .551\,C\,A^{.936\,A^{-.045}}$$

en sqm et cfs en m^3/s et km^2

Cette formule n'a pas la prétention d'être applicable au calcul des crues, elle sert seulement à rassembler, sous forme condensée, des tableaux d'observations. Si le nombre d'années d'observations et le nombre de bassins étudiés étaient les mêmes pour les différentes tailles de bassins, cette équation aurait une valeur appréciable. On peut penser en effet que l'influence du bassin étant en gros proportionnelle à $\sqrt{A}$ la crue doit être proportionnelle à une puissance un peu plus faible de A si l'on veut tenir compte de l'effet de la pluie. Mais la courbure de l'enveloppe de Creager peut tout aussi bien être dûe à l'inégalité des durées et nombres d'observations.

La formule de Myer est le type d'un grand nombre de formules visant à calculer la crue rare, la crue extraordinaire, etc. On peut citer les diverses formules en

$$Q = C\,A^{\alpha} \qquad \frac{1}{4} < \alpha < 1$$

...

les formules de Kuichling $Q = A \left\{ \frac{a}{A + b} + c \right\}$

de Ganguillet $Q = \frac{a A}{b + \sqrt{A}}$

leur nombre est immense, les coefficients calculés pour ces formules sont relatifs à certaines régions bien déterminées, on ne doit pas sans précautions les utiliser ailleurs. Mais surtout il faut bien connaître leur signification. Nous ne croyons pas qu'elles soient utilisables si l'on n'a pas lu l'article original où elles ont été données. Pour cette raison, nous nous abstiendrons de donner des coefficients numériques.

D'autres auteurs ont voulu faire intervenir, avec la surface, la forme du bassin, nous citerons :

Craig $Q = 440\, W \log \frac{8L^2}{W}$ (W = largeur du bassin (L = longueur du bassin

Dredge, Burge $Q = c \frac{A}{L^{2/3}}$

Possenti

$Q = \frac{CK}{L}\left(A_2 + \frac{A_1}{3}\right) \approx c A^{\text{[illegible]}}$ (K = coefficient de pluie (A_2 partie montagneuse du bassin (A_1 partie plate

Cette dernière nous amène à un type faisant intervenir l'intensité de la pluie :

Burkli Ziegler Cramer $Q = A C i \left(\frac{S}{A}\right)^{1/4}$ (S pente du bassin)

Hering $Q = C i A^{\text{[illegible]}} S^{\text{[illegible]}}$

Pettis $Q = C (R W)^{1,25}$

Enfin, toutes ces formules font abstraction de la fréquence des crues; en voici, par contre, où la fréquence (ou la durée de retour) joue un rôle primordial :

Fuller : $Q = C A^{\text{[illegible]}} \{1 + \text{[illegible]} \log T\} (1 + 2 A^{\text{[illegible]}})$

Horton : $Q = c T^{\text{[illegible]}}$

Lane : $Q = C \log (T + B)$

Creager: $Q = C A^{55} \left\{ \frac{\text{[illegible]}}{3} \left(1 - \frac{\text{[illegible]}\, T}{3}\right) + \frac{\text{[illegible]}\, T}{3} \right\}$

....

Parmi ces formules, celle de Fuller est la plus connue, mais elle ne doit pas être employée sans précautions. Nous renvoyons à la partie statistique Chapitre II pour les critiques relatives à l'intervention de la fréquence dans cette équation. Mais ici nous devons noter que Fuller a établi ses coefficients sur un nombre très restreint de données, en particulier, le coefficient

$\left(1 + \alpha A^{-0,3}\right)$ résulte de 23 observations de crues ! Le travail de Fuller a été heureusement poursuivi en Amérique et l'on a pu donner des tableaux des coefficients obtenus pour diverses régions. Cependant nous avons fait des réserves à la fois sur la signification des calculs de Fuller et sur la fidélité de l'interprétation de ses successeurs.

Nous ne pouvons guère discuter ces formules sans avoir fait une étude un peu plus poussée du phénomène de crue. C'est là l'objet du paragraphe suivant.

LE MÉCANISME DES CRUES

Lorsque la pluie tombe sur un bassin, il lui arrive diverses mésaventures : une partie est retenue par la végétation, une autre s'infiltre, une autre remplit les petites dépressions du sol, puis s'écoule à la surface. Si le sol est enneigé, une partie de la pluie peut être retenue par la neige, elle peut aussi accélérer la fonte de cette neige. Le mécanisme de tous ces phénomènes est évidemment complexe, et il ne peut être question de les examiner tous en détail ici.

La façon dont une pluie agit sur le débit est fonction :

1°) de l'intensité de la pluie, de sa durée, de sa répartition dans le temps et l'espace; s'il y a de la neige sur le bassin : de la nature de cette neige, de la température extérieure de l'air, de la température de la pluie.

2°) de la végétation qu'elle a rencontrée: forêt, pâturage, terre cultivée, etc.

3°) de l'état du sol : capacité d'infiltration, état de saturation, perméabilité, etc.
de l'état du sous-sol : possibilité de transmettre rapidement l'eau infiltréepar voie "hypodermique"

4°) de la topographie fine du sol : petites dépressions, cuvettes de toutes espèces,
de la topographie des pentes nourrissant les principaux affluents : pentes locales, rugosité.

5°) de la configuration du bassin, arrangement des affluents, pente des cours d'eau principaux, existence de lacs, de plaines ou méplats, rugosité du lit, etc.

.....

Il est à peu près impossible d'évaluer en détail l'action de chacun de ces facteurs. Nous allons donner quelques indications sur ce qui a été fait dans cet ordre d'idées.

Nous commencerons par les facteurs relatifs aux lits des affluents. Dans une rivière assimilable à un canal, les équations du mouvement non permanent sont approximativement :

$$\frac{\partial \sigma v}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

$$\frac{v^2}{C^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

où v est la vitesse du fluide, vitesse moyenne dans une section
σ la section
z la hauteur au-dessus d'un plan horizontal
$C = k r^{a}$ ou
r est le rayon hydraulique, et
a l'exposant de la formule de Manning.

Même dans les cas les plus simples, il n'est guère facile d'intégrer ces équations. En fait, nous n'en avons jamais vu de solution complète, quoique les méthodes habituelles semblent s'appliquer. Si nous admettons que ces équations régissent le phénomène, nous ne savons donc pas calculer le débit sortant d'un élément de lit connaissant le débit qui y entre. Il n'est pas possible ici de donner toutes les méthodes approximatives qui ont été proposées; elles n'ont d'ailleurs qu'un intérêt secondaire. La méthode la plus directe consiste à résoudre l'équation par approximations successives sur des intervalles assez courts.

Il existe naturellement d'autres techniques pour traiter ce problème. Nous citerons, en France, la méthode Bachet. Elle consiste à regarder à l'instant t la forme de l'onde de crue dans l'espace et à chercher une approximation de la forme à l'instant $t + \tau$. Son principe est le même que celui des méthodes générales de résolution dont nous parlions plus haut. Nous en retiendrons simplement que l'on peut faire une correspondance entre un point A de l'onde à l'instant t et un point B à $t + \tau$ telle que l'onde à $t + \tau$ semble résulter de l'onde primitive par translation et applatissement.

La technique américaine habituelle considère au contraire la forme dans le temps de l'onde de crue en un point déterminé et on déduit la forme de l'onde de crue en un autre point à l'aval du premier. L'équation de continuité s'écrit sous forme simplifiée :

$$(t_2 - t_1)\left\{\frac{I_2 + I_1}{2} - \frac{O_2 + O_1}{2}\right\} = S_2 - S_1$$

....

où I est le flux entrant, D le flux sortant, et S l'eau accumulée entre les deux points considérés. Dans le cas des réservoirs où le débit sortant est fonction de S seul, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$(I_1 + I_2) + \left(\frac{2S_1}{t} - D_1\right) = \frac{2S_2}{t} + D_2$$

que l'on peut facilement utiliser si la relation entre S et D est connue. Dans un cours d'eau naturel, l'accumulation est fonction à la fois du débit entrant et du débit sortant et aussi de leurs dérivées. Cependant, en première approximation, on peut encore utiliser une courbe de correspondance entre S et (I, D) seulement. Les techniques relatives à tous ces problèmes sont simples et chaque usager peut en trouver une pour son travail personnel. Nous les avons citées simplement parce qu'il ne faut pas perdre de vue qu'en général les évacuateurs sont à l'aval d'un ou plusieurs réservoirs et que souvent on a intérêt à tenir compte de l'effet de ceux-ci. Il était nécessaire aussi de montrer qu'en général les équations de propagation ne peuvent être considérées comme linéaires.

L'étude de la propagation doit se faire dans chacun des principaux affluents, surtout si le bassin est assez étendu et risque d'être soumis à des pluies non uniformes.

Si nous passons au stade précédent de formation des crues, l'étude de l'écoulement de l'eau sur des pentes est trop peu avancée. Certains ont essayé de faire des calculs sur ce problème, mais il ne semble pas qu'on ait réussi à donner des résultats acceptables. Velikanov a publié en 1935 une théorie qui ne peut résoudre le problème. Les hypothèses de cet auteur sont très larges, mais il les a restreintes inconsciemment en demandant qu'il n'y ait pas de passage de l'eau d'un côté d'une ligne de pente à l'autre. D'autre part, Velikanov a calculé la vitesse de l'eau comme si chaque élément de liquide était indépendant des autres. Dans cette direction, nous ne pouvons donc utiliser des résultats sûrs. Cependant, il est assez logique de penser que les équations du mouvement sur une surface ne sont pas linéaires, en particulier parce que l'effet des frottements est très largement dépendant de la hauteur de l'eau au-dessus du sol.

Les recherches sur la percolation de l'eau dans le sol ont au contraire été assez poussées. Quoique, en général, les différents auteurs aient oublié qu'il s'agit là d'un problème de thermodynamique et non pas d'hydraulique, la loi de Darcy-Poiseuille a été utilisée pour de nombreuses études. Dans le cas précis des crues, on peut se contenter de cette approximation vers la fin de la crue, on étudie en effet une percolation rapide où l'effet hydraulique est le plus notable. Mais au début de la crue, la façon dont la pluie s'infiltre et percole dépend essentiellement des propriétés thermodynamiques du sol.

Cependant il ne peut être question d'utiliser les équations de Darcy dans l'étude d'une crue, il manque en effet presque toujours les données les plus essentielles sur le sous-sol

Ce bref tour d'horizon avait pour objet de montrer que la méthode analytique stricte est difficilement applicable au calcul des crues. Nos successeurs seront peut-être plus heureux et mieux armés. Depuis longtemps les hydrauliciens et hydrologues ont été conscients de cette carence et l'on a cherché une méthode semi-synthétique, semi-analytique de calcul. Si l'on suppose qu'il tombe sur le bassin une pluie distribuée dans le temps et dans l'espace, pour des conditions initiales données, le débit résultant est une fonction de la pluie. Pour simplifier, nous allons supposer la pluie uniformément distribuée dans l'espace et l'on aura :

$$x(t) = \mathcal{C}\{y(t)\}$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, cette opération n'est pas linéaire, mais L.K. Sherman a tenté la représentation linéaire. C'est ce que l'on appelle la méthode de l'unit-hydrograph ou hydrogramme unitaire que nous allons maintenant exposer.

L'HYDROGRAMME UNITAIRE.

La méthode de Sherman se résume de la façon suivante :

1/ Lorsque le bassin est resté longtemps sans recevoir de pluie, le débit décroît suivant une certaine courbe appelée courbe d'épuisement; en cas de pluie, ce "débit de base" croît très lentement par suite de l'influence de la pluie sur la nappe souterraine.

2/ Une partie de la pluie tombée sur le bassin s'infiltre et réapparaitra. d'une part dans le débit de base, d'autre part dans le flot hypodermique, eau infiltrée qui réapparait après un court trajet sous la surface.

3/ Enfin, le reste de la pluie ayant atteint le sol ruisselle sur la surface et forme la partie qui répond le plus vite aux pluies.

Les trois postulats de la méthode Sherman s'expriment ainsi :

I - Pour un bassin donné et une pluie de distribution temporelle et spatiale déterminée, la durée du ruissellement est la même quelle que soit la quantité de pluie tombée.

II - Pour des pluies de même distribution mais de volumes différents, les ordonnées des hydrogrammes de ruissellement sont dans le même rapport que les volumes écoulés.

...

III - La forme dans le temps de l'hydrogramme de ruissellement est indépendante de la forme des débits antérieurs.

Ces trois principes permettent de calculer le débit de ruissellement résultant d'une pluie de volume donné, lorsque l'on connait le débit pour une pluie de même distribution mais de volume différent. Il est facile de voir d'après ce que nous avons dit plus haut qu'aucun de ces principes ne peut être hydrauliquement exact. En fait, l'approximation est meilleure que celle de toutes les autres méthodes.

On comprendra aisément le principe de la technique de l'hydrogramme unitaire si l'on compare le bassin à un quadripole électrique. Si $u(t)$ représente la pluie donnant naissance au ruissellement, et $v(t)$ le débit résultant, la méthode consiste à assimiler $u(t)$ à la tension d'entrée du quadripole, et $v(t)$ à la tension de sortie. L'hydrogramme unitaire pour un temps de pluie très court est alors simplement la réponse du quadripole à une impulsion instantanée.

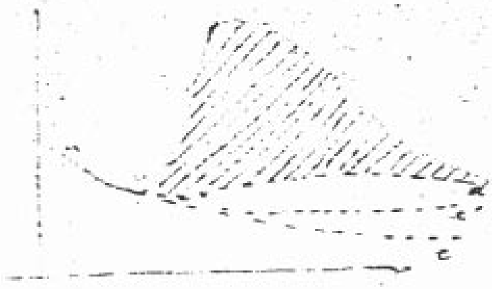
Supposons que nous connaissions cet hydrogramme unitaire pour un bassin. Pour une pluie $y(t)$ donnée, nous partagerons le volume d'eau en trois parties : $u_1(t)$ ruisselée, $u_2(t)$ infiltrée peu profond, $u_3(t)$ alimentant les nappes souterraines. L'hydrogramme unitaire nous permettra de calculer $v_1(t)$ débit ruisselé : Par une méthode quelconque, on calcule le flot hypodermique $v_2(t)$ puis le flot de base $v_3(t)$. La crue sera la somme des trois, plus, naturellement le débit du cours d'eau s'il n'y avait pas eu de pluie; ce dernier est fourni par la courbe d'épuisement. Il a fallu attendre 1945, soit 16 ans après que Folse ait proposé et utilisé la méthode et 13 ans après que Sherman l'ait utilisée pour le ruissellement, pour que l'on pense à l'appliquer au flot hypodermique et au flot de base. Sous forme mathématique, la crue s'écrira :

$$x(t) = x_0(t) + \int K_1(t,\tau)\, u_1(\tau)\, d\tau + \int K_2(t,\tau)\, u_2(\tau)\, d\tau + \int K_3(t,\tau)\, u_3(\tau)\, d\tau$$

La difficulté essentielle de cette théorie est l'estimation de u_1, u_2, u_3 connaissant leur somme. Pour ceci, nous allons avoir recours à la théorie de l'infiltration. L'essentiel de cette théorie se résume en ceci : lorsque la pluie commence à tomber, une certaine partie s'infiltre, ou reste à la surface (pocket storage), la capacité d'infiltration est le débit maximum (noté f) qui peut ainsi être soustrait au ruissellement direct. Puis, la couche superficielle du sol se sature et transmet l'eau aux couches inférieures, le taux maximum de cette transmission s'appelle souvent capacité de percolation. Le taux d'infiltration se réduit de plus en plus jusqu'à être nul si la période de pluie est suffisamment longue. On peut admettre avec Horton que la capacité d'infiltration diminue proportionnellement à la quantité infiltrée.

....

Comme il n'existe pas suffisamment de mesures directes du taux d'infiltration, on a estimé des taux moyens par la méthode de l'hydrogramme. Voici la technique utilisée. Soit un hydrogramme se produisant dans une période assez sèche, il a la forme indiquée par la figure. La portion (a, b) relative à l'écoulement de l'eau souterraine peut se prolonger jusqu'à c, ceci avec d'autant plus de précision que l'on a mieux observé les courbes d'épuisement. On admet qu'une partie de l'eau infiltrée profondément ressort durant la crue, et l'on prolonge suivant b c'. La partie hypodermique ressort plus rapidement suivant b d.



Le résidu, soit l'aire hachurée, représente le ruissellement. La différence de ce ruissellement et de la pluie tombée représente l'infiltration, d'où le calcul de l'indice ϕ (noté f_{av} ou F_{av} par les Américains). Si l'on a fait le calcul sur un phénomène où la pluie était uniforme, il est facile d'en déduire d'après la formule de Horton, la capacité d'infiltration initiale et sa variation en fonction de l'infiltration.

Il existe de nombreuses méthodes pour séparer les différentes contributions à l'hydrogramme. Notons par exemple celle de Parsons. Si l'on porte un hydrogramme sur un papier semi-logarithmique, la partie extrême de l'hydrogramme est voisine d'une droite que l'on extrapole environ jusqu'au point où la contribution profonde semble être maximum. On relie ensuite la droite au débit immédiatement antérieur à la crue. La partie située au-dessous de cette courbe est supposée représenter l'eau d'origine profonde. On la défalque, puis on recommence sur le résidu de façon à éliminer la partie hypodermique. Ce qui reste représente le ruissellement et doit être en coordonnées semi-logarithmiques voisin d'une droite peu après que la pluie a cessé.

Cette procédure permet d'ailleurs de développer des relations entre la quantité d'eau emmagasinée et le débit. La reconstitution d'un hydrogramme à partir des pluies est ici légèrement différente de la méthode de l'unit hydrograph; cependant comme toutes les deux sont largement arbitraires, on ne peut dire quelle est la meilleure. La différence n'est pas considérable.

On trouvera dans la plupart des traités modernes d'hydrologie les méthodes de calcul de l'hydrogramme unitaire, aussi n'insisterons-nous pas sur cette question. Remarquons cependant que ces méthodes se contrôlent elles-mêmes. Il suffit pour cela de calculer un hydrogramme sur un ou deux exemples de crues, puis d'essayer sur diverses autres crues de recalculer le débit à partir des pluies. En ce qui concerne les indices d'infiltration, on trouvera en appendice une table extraite de Creager donnant quelques indices observés.

....

Pour simplifier les calculs, certains auteurs ont admis que la distinction entre les différentes espèces de débits (ruissellement, hypodermique, profond) n'était pas absolument nécessaire. On peut alors calculer directement la crue comme fonction linéaire de la pluie.

Naturellement les résultats obtenus sont moins bons; ceci étant dû surtout au fait que la méthode est moins souple. Ils représentent pourtant une assez remarquable première approximation. On peut obtenir une approximation sensiblement meilleure et presque aussi bonne que celle de la méthode complète en utilisant un hydrogramme d'autant plus pointu que la pluie est plus forte. On verra dans le chapitre suivant quelle utilisation on peut faire de ces données.

RELATIONS ENTRE L'HYDROGRAMME UNITAIRE ET LES CARACTERISTIQUES DU BASSIN.

L'hydrogramme unitaire étant une caractéristique du bassin, il est naturel de chercher à le calculer à partir des autres données que l'on possède. Faisons d'abord quelques remarques :

Pour des bassins "hydrauliquement semblables", d'après la formule de Manning, les temps d'écoulement sont dans le rapport $\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^{1/4}$ et les débits dans le rapport $\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^{3/4}$

Les pentes des surfaces du terrain ont en général peu d'importance (sauf si l'on compare un bassin de montagne dénudé à un bassin de plaine), les accidents de l'ordre de 10 cm. étant en général plus significatifs que la répartition moyenne des pentes.

La pente du cours d'eau, son rayon hydraulique et la possibilité d'accumulation d'eau interviennent notablement.

La disposition des cours d'eau et la forme du bassin permettant à tous les apports d'arriver simultanément, ou au contraire les espaçant, peuvent aussi intervenir.

I - Approximation de Mr. M. BERNARD -

Bernard a défini une caractéristique du bassin sous la forme $u = f\left\{\frac{P}{L}, F, S\right\}$ où P représente la forme du bassin; L est la distance maximum que peut parcourir l'eau; F indique la condition hydraulique du cours d'eau principal; S est la pente du cours d'eau principal. Le calcul de M. Bernard est assez compliqué, Jarvis a donné une approximation de u assez satisfaisante sous la forme : $u = \frac{65\sqrt{S}}{L}$

S en m. par km. et L en m.

....

On trouvera en appendice un diagramme des valeurs nécessaires à l'unit hydrograph pour différentes valeurs de u.

II - Approximation de M. Mc. CARTHY. -

Mc. Carthy, par une méthode analogue à celle de Merrill Bernard, a donné des abaques permettant de calculer la pointe de l'hydrogramme unitaire, le lag (c'est-à-dire le temps écoulé entre le début de la pluie et la pointe de l'hydrogramme) et la durée de l'hydrogramme. Les diagrammes de Mc. Carthy sont reproduits en appendice. Les caractéristiques du bassin utilisées sont : la surface du bassin, la pente de la courbe hypsométrique, et la disposition des cours d'eau repérée par le nombre de rivières principales. La construction de l'abaque de Mc Carthy est assez compliquée et nous ne pensons pas nécessaire de la reproduire ici. En tout état de cause, de telles constructions sont relatives à une région déterminée et devraient être refaites pour d'autres pays.

III - Approximation de M. Franklin F. SNYDER -

Celle-ci est beaucoup plus intéressante au point de vue analytique. Les paramètres définissant l'hydrogramme unitaire sont encore la pointe, le lag (mais mesuré ici à partir du "centre de gravité dans le temps", de la pluie) et la durée totale de la crue. Snyder a considéré que la pente était un facteur secondaire et n'a cherché de relations qu'avec l'aire et la forme du bassin.

Le principe de la méthode est le suivant : partant du point de mesure, on remonte le long des cours d'eau et l'on trace un réseau de courbes telles que le temps de parcours de l'eau au point de mesure soit constant. Ce calcul peut être fait, en supposant un régime permanent, par la formule de Manning. Il est très long et sujet à caution; sur un bassin assez petit, on pourrait avoir des résultats meilleurs en suivant des "patches" de fluorescéine. On porte alors en abscisses le temps de parcours et en ordonnées le pourcentage de l'aire du bassin affecté à ce temps de parcours.

Il est facile de voir que la courbe ainsi obtenue serait l'hydrogramme s'il n'y avait pas d'effets d'accumulation ou d'ondes progressives. Pour tenir compte des effets d'accumulation, on peut avoir recours à la méthode de Clark. L'idée de cet auteur consiste essentiellement à faire passer la courbe obtenue par Snyder par un réservoir. Tous les éléments du bassin sont supposés être transmis par le même réservoir.

Snyder a cherché les relations entre sa courbe aire-temps et l'hydrogramme. Les résultats ayant été assez bons mais l'établissement d'une telle courbe étant fastidieux, nous donnerons les résultats approximatifs de Snyder. Soit :

....

L_{ca} = distance de la station au centre de gravité du bassin (km)

L = longueur maximum des cours d'eau (km)

t_p = lag en heures de l'hydrogramme unitaire

t_r = $t_p/5,5$ (correspondant à la division de la branche montante de l'hydrogramme en 6 parties)

t_R = durée élémentaire adoptée dans l'étude (voisine de t_r)

τ_R = lag de l'hydrogramme d'une pluie de durée

q_{t_R} = pointe en l/s/km² pour l'hydrogramme unitaire

A = surface du bassin en km²

Soit une pluie uniforme de durée t_r et intensité i mm/s la pointe de l'hydrogramme sera :

$$Q_p = i\, a_p$$

où a_p est l'aire contribuant au débit de pointe, soit pour I mm tombés en t_r heures :

$$Q_p = \frac{I}{t_r}\,\frac{a_p}{3,6} \qquad m^3/sec$$

ou en l/s/km²

$$q_p = \frac{I}{t_p}\,\frac{a_p}{3,6}\,\frac{1000}{A}\,\frac{t_p}{t_r} \qquad l/s/km^2$$

La quantité $\frac{a_p}{A}$ a été trouvée sensiblement constante dans les Appalaches et voisine de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{10}$

soit donc $$153 \leq q_p \frac{t_p}{I} \leq 191$$

De plus Snyder a donné la relation :

$$t_p \approx 1,5\,(L\,L_{ca})^{0,3}$$

Si la période élémentaire utilisée pour la construction n'est pas t_r, Snyder recommande de prendre $\tau_R = t_p + \frac{t_R - t_r}{4}$

Il a d'autre part donné un abaque de correspondance entre t_p et les largeurs de l'unit hydrogramme à diverses hauteurs (Reproduit en appendice).

....

IV - Méthode de Clark.

Celle-ci permet de construire un hydrogramme unitaire sans connaitre la distribution despluies, mais seulement la date de la cessation des pluies. Elle est liée directement à l'équation d'accumulation du bassin. La courbe de recession d'un hydrogramme présente en général un point d'inflexion, celui-ci peut être considéré comme la date d'arrivée de la dernière onde de crue du bassin. Le temps écoulé entre la cessation de la pluie et ce point est donc le temps maximum de parcours des ondes de crues. Si l'on suppose que l'effet de délai est proportionnel à la distance au point de mesure, il est possible de construire une carte des délais. La courbe aire-temps qui en résulte est donc l'hydrogramme instantané non corrigé des effets d'accumulation. Il suffit de transmettre cette courbe par un réservoir pour avoir une approximation de l'hydrogramme. Clark écrit donc après le point d'inflexion :

$$\frac{dS}{dt} = -Q \quad \text{et approximativement} \quad S = kQ$$

On calcule K au point d'inflexion par la fomule résultante :

$$K = -Q\frac{dt}{dQ}$$

Il suffit alors pour avoir l'hydrogramme de résoudre :

$$K\frac{dQ}{dt} = I - Q$$

où I est la courbe aire-temps calculée plus haut.

Soit
$$Q(t) = \int_0^t e^{-\frac{t-\theta}{K}}\, I(\theta)\, d\theta$$

Clark a appliqué cette méthode sans distinction entre débits profonds, etc.. Les résultats sont tout à fait remarquables.

D'autres auteurs ont proposé depuis des formules approximatives pour la longueur de la courbe aire-temps et K :

$$C \approx a\, n^{n}\left(\frac{L}{\sqrt{S}}\right)^{m}$$

$$K \approx b + c\,\frac{W}{R}$$

a, b, c, n, m sont des constantes à calculer pour chaque région; n représente le nombre de cours d'eau principaux; L et S sont respectivement la longueur et la pente du cours d'eau principal; W est la largeur du bassin et R sa pente moyenne.

Ces différentes méthodes ne sont citées que comme exemple; on trouve dans la littérature de nombreuses variantes. Cependant celles que nous avons nommées semblent représenter les aspects principaux de ces études. Quant à leur précision, elle varie assez notablement suivant les données numériques employées. On peut estimer que la méthode de Snyder-Clark donne une précision à peu près égale à celle des relevés directs de crues que l'on possède sur la plupart des cours d'eau;

....

LA STRUCTURE DES PLUIES.

Si nous admettons que par l'une ou l'autre des méthodes précédentes nous savons calculer la crue résultant d'une pluie donnée, il nous reste, pour compléter la solution du problème, à étudier le comportement des pluies. On peut dire que celles-ci sont très mal connues. Les caractères de la pluie varient suivant les régions climatiques, la structure orographique, etc. Pour les calculs qui nous intéressent, il est nécessaire d'avoir une idée du type de pluie qui peut produire des crues. En général, pour un petit bassin (< 100 km^2), les orages ont un rôle très important; pour de grands bassins (> 4000 km^2), les pluies de durée longue et intensité plus faible sont décisives. Entre ces deux limites, toutes les combinaisons sont possibles.

Nous commencerons par l'étude des orages.

STRUCTURE DES ORAGES. -

Un orage est en principe une cellure convective, l'air chaud entrant par la base et montant à une hauteur variable (de 5 à 10 Km) d'autant plus forte que la cellule est plus "puissante". Un orage classique important a environ 10 Km de rayon; il se déplace à une vitesse en général voisine de 30 à 40 km/h.

On a essayé de calculer la quantité d'eau maximum que peut fournir un tel orage. Cette quantité dépend d'une foule de facteurs, et si l'on veut chercher un maximum, on sera ramené à chercher les maxima de combinaisons de ces facteurs. Prenant par exemple la formule de Fletcher $R = C\,q$ où C est un facteur de convergence et q l'humidité spécifique de l'air entrant dans la cellule convective, on voit qu'en admettant que C est peu variable pour les gros orages R est proportionnel à q au sol. Le problème est donc simplement transposé à l'étude de q.

On peut admettre $C \approx 285 \dfrac{mm/24h}{gm/kg}$ pour la plupart des gros orages.

REPARTITION DE LA PLUIE D'ORAGE DANS L'ESPACE.

On manque presque totalement de données sur la répartition des pluies d'orage en France. Les seuls travaux connus sont ceux de Besson et Grisollet. Ces auteurs ont proposé une formule du type

$$I_D = I_o \frac{60 - 3D}{60 + 1 \cdot D}$$

où I_o représente la pluie maximum et D la distance au point de pluie maximum.

Au contraire, aux Etats-Unis on possède de nombreuses cartes d'averses.

....

Il semble que la formule de Besson et Grisollet s'applique à ces averses à condition de considérer : 1°) qu'elle n'est valable que suivant la ligne de plus rapide décroissance de la pluie, 2°) qu'en moyenne. Pour une étude systématique des crues d'orages, il y a lieu de tenir compte de ces réserves.

REPARTITION DANS LE TEMPS. -

De la même façon l'intensité de la pluie diminue lorsque l'on considère des intervalles de plus en plus grands. Pour représenter ceci, on a eu recours à des formules du type

$$i = \frac{a}{b+t} \quad ou \quad i = A\,t^{-\alpha}$$

Voici les chiffres donnés par Grisollet pour Paris :

pluie atteinte une fois en 10 ans : $i = \frac{2530}{10+t}$

pluie atteinte une fois en 50 ans : $i = \frac{3220}{11+t}$

i en mm/heure $\qquad$ t en minutes.

On trouvera dans le livre de Meyer toute une série de formules de ce type s'appliquant d'ailleurs aussi bien aux orages qu'aux autres types de précipitation.

On peut encore citer les travaux italiens, en particulier ceux de T. Marzolo et Puppini. Ces auteurs admettent que la pluie la plus forte d'une durée T s'écrit :

$$i = \frac{a}{T^n}$$

Si la "caractéristique de retard", c'est-à-dire la courbe aire-temps de Clark est de la forme $A(t)$, le débit résultant d'une pluie $i(T)$ sera :

$$Q = i\int_{t-T}^{t} \varphi \, dA_t$$

soit, si le coefficient d'écoulement φ est constant :

$$Q = i(T)\,(A_t - A_{t-T})\,\varphi$$

Le débit maximum sera alors donné par

$$Q = a\varphi \max_{t,T} \frac{A_t - A_{t-T}}{T^n}$$

Si τ est le retard maximum de l'eau, il en résulte que dans la plupart des cas T_{crit} est plus petit que τ. On peut admettre si n est voisin de $\frac{2}{3}$ que $T_c \simeq 0{,}5\,\tau$ à $0{,}7\,\tau$

Il suffira alors de calculer les débits pour des pluies de durée T_c.

....

Nous ne discuterons pas plus avant ces formules, elles interviennent peu dans le calcul des crues par méthode purement physique. Celle-ci revient en effet le plus souvent à prendre une pluie extrême observée sur le bassin lui-même, ou sur un bassin voisin, et à la transposer sur le bassin étudié. Si on place la pluie de telle sorte que la crue résultante soit maximum, on obtient ainsi la maximisation d'un des facteurs du problème.

Il y a naturellement nombre de précautions à prendre dans ces transpositions. Si les bassins en cause sont des bassins de plaine, on peut en général transposer purement et simplement l'averse. En montagne, le problème est tout à fait différent. On tient alors compte, par des procédés plus ou moins empiriques, de l'effet orographique. Ainsi des vents d'ouest peuvent amener une averse sur un bassin si l'orientation de la vallée est ouest-est; si au contraire la vallée est dirigée du nord au sud, il y a de fortes chances pour qu'une averse d'ouest la dépasse sans effet appréciable.

EFFET DE L'ENNEIGEMENT. -

Dans la quasi totalité de ces méthodes, il est admis que l'on traite l'eau de fonte de la même façon que l'eau de pluie. Voici donc quelques méthodes de calcul de la quantité de neige fondue :

1° - Méthode des degrés jour.

La quantité de neige fondue est approximativement égale à

$$h = C\,\theta$$

où θ représente la moyenne des températures positives pendant le temps considéré; θ est exprimé en degrés-jour. C a été trouvé dans la plupart des études variable entre : 0,5 et 1,3 mm par degré-jour. Cependant il s'est produit des fontes atteignant 3 mm par degré-jour.

2° - Méthode du transfert d'énergie calorifique.

Cette méthode conduit à une formule du type :

$$h = K_1\,V\,(e - 6{,}11) + K_2\,V\,\theta$$

où V est la vitesse du vent en m/s; e la pression de vapeur de l'eau dans l'air en millibars.

En donnant des valeurs standard aux coefficients, ceci peut s'écrire :

$$h_1 = 57{,}2\,V\,\{0{,}0076\,\theta + 0{,}006\,e - 0{,}036\}$$

θ est la température en degrés centigrades positifs.

....

A cette quantité on peut ajouter :

$$h_2 = \frac{R\theta}{80}$$

où R est la pluie totale tombée; θ, la température de cette pluie.

La première formule ne peut s'appliquer que si la neige est à un degré de "maturité" suffisant. Dans le cas contraire, on tiendra compte de cette possibilité en étalant la fonte dans le temps suivant la façon dont se présente la neige sur le bassin.

°
° °

REMARQUES GENERALES SUR CES METHODES

Nous ferons simplement deux remarques sur la valeur de ces méthodes :

1° - Elles ont l'avantage de donner une idée assez nette des circonstances qui permettent l'apparition de telle ou telle crue. Pour une pluie donnée, les calculs sont assez précis et par conséquent le problème est reporté à l'étude des pluies.

2° - Elles ont l'inconvénient de ne pas permettre de chiffrer ces idées. Si l'on peut dire, elles conduisent au calcul précis d'une crue extraordinaire, mais ne disent pas de combien elle est extraordinaire.